DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT 1986

MATHEMATIQUES

2ème épreuve commune aux options M et P

Durée : 4 heures.

L'épreuve se compose d'un exercice noté sur 7 et d'un problème noté sur 13, dont les 3 parties sont largement indépendantes.

EXERCICE

$\mathbb{R}_p[X]$ est l'ensemble des polynomes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$, nul ou de degré au plus p, où p est un entier au moins égal à 2 .

f est une application définie sur $\mathbb{R}_p[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_p[X]$, déterminée par l'égalité (1)

(1) $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

PREMIERE QUESTION

a) Montrer que f est un endomorphisme linéaire .

b) Comparer le degré de P et celui de f(P)

c) Déterminer le noyau et l'image de f

d) Discuter de l'existence et de la nature de la solution de l'équation d'inconnue le polynome U : f(U) = A, A élément de $\mathbb{R}_p[X]$.

DEUXIEME QUESTION

On considère une suite de polynômes $P_0, P_1, \ldots P_p$ définis par les conditions : $P_0 = 1$ $P_1 = X$, puis pour n au moins égal à 2,

$f(P_n) = P_{n-2}$, $P_n(0) = P_n(1) = 0$

a) Démontrer, sans chercher à la déterminer, que cette suite de polynômes existe et est unique.

b) Déterminer le terme plus haut degré de P_n, pour $n \in [\![0; p]\!]$

c) Montrer que $(P_0 \ldots P_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$ et calculer les coordonnées sur cette base d'un élément A de $\mathbb{R}_p[X]$, à l'aide de certains des nombres $A_k(0)$, $A_k(1)$, où $A_0 = A$, et où $A_{k+1} = f(A_k)$

TROISIEME QUESTION

a) Démontrer que $P_n(X) = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ $\forall n \in [\![1, p]\!]$

b) Ecrire la matrice de f sur la base $(P_0 .. P_p)$. Est-elle diagonalisable ?

c) d étant la dérivation sur $\mathbb{R}_p[X]$, comparer dof et fod

d) Dans un repère orthonormé, trouver une construction du graphe de $\widetilde{f(P)}$ à l'aide de celui de $\widetilde{P}$, P étant un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ et $\widetilde{P}$ étant la fonction polynôme associée, c'est-à-dire une construction du point d'abcisse x du graphe de $\widetilde{f(P)}$ à l'aide des points d'abcisses x, x+1, x+2 du graphe de $\widetilde{P}$

Tournez la page S. V. P.

P R O B L E M E

(R A P P E L , *les trois parties sont largement indépendantes, et pourront être traitées dans un ordre arbitraire*).

(C) est un cercle de centre O, de rayon 1. (p) et (q) sont deux droites données. Un point M décrit le cercle (C), et se projette orthogonalement en P et Q sur (p) et (q). On se propose d'étudier la famille des droites (P ; Q), soit (F).

P R E M I E R E P A R T I E

Le plan du cercle est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ dont les axes sont x'Ox et y'Oy. Le point M du cercle est repéré par la mesure de l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OM})$, notée t. (p) et (q) sont les diamètres x'Ox et y'Oy de (C). Montrer que la famille (F) enveloppe une courbe (E) dont on donnera une représentation paramètrique, et que l'on construira rapidement.

D E U X I E M E P A R T I E

On adjoint au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un troisième axe z'Oz, défini par le vecteur $\vec{k}$, tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé. (p) est maintenant la droite d'équations : z = a ; y = o , et (q) la droite d'équations : z = b , x = O. où a et b sont deux réels distincts (a < b).

PREMIERE Q U E S T I O N

t étant fixé, on note P(t), Q(t), D(t) les points correspondants P, Q et la droite (P(t) Q(t)). Un point T décrit D(t)

(1) On pose $\vec{OT} = \vec{OP}(t) + m.\overrightarrow{P(t)Q(t)}$, $m \in \mathbb{R}$

On obtient donc une représentation paramètrique de D(t), et quand t et m varient, une représentation paramètrique d'une surface (Σ) ensemble des positions des droites de la famille (F).

Déterminer la représentation paramètrique (1) de D(t)

DEUXIEME Q U E S T I O N

Existe-t-il des fonctions f continûment dérivables telles que en chacun de ses points, la courbe définie par $\vec{OT} = \vec{OP}(t) + f(t)\overrightarrow{P(t)Q(t)}$ soit a) tangente à D(t) ? ou b) normale à D(t) ? si oui, lesquelles ?

TROISIEME Q U E S T I O N

Quelles sont les courbes intersection de la surface (Σ) et des plans parallèles à xOy ?

Calculer le volume limité par (Σ) et par les deux plans d'équations z = a, et z = b.

QUATRIEME Q U E S T I O N

Déterminer l'ensemble des points H de (Σ) tels que le plan tangent en H à (Σ) soit parallèle à z'Oz. Quelle est la projection sur xOy de la courbe (h) décrite par H . Calculer la longueur de la courbe (h) .

T R O I S I E M E P A R T I E

PREMIERE Q U E S T I O N

(p) est de nouveau la droite x'Ox , et (q) est une tangente à C parallèle à y'Oy. Montrer que (F) enveloppe une courbe (E) dont on donnera une représentation paramètrique, et que l'on construira.

DEUXIEME Q U E S T I O N

(p) est toujours la droite x'Ox , et (q) est la droite d'équations z=o ; x=s, où s est un réel différent de 0,1 et -1. Montrer que (F) enveloppe une courbe (E_s). Donner une représentation paramètrique de (E_s).

Pour quelles valeurs de s la courbe admet-elle des branches infinies ?

Pour quelles valeurs de s la courbe admet-elle des points de rebroussement non situés sur la droite (p) ? et combien ?